惑星の位置はこうして決まる

宇留須　健太

1.　はじめに

惑星の位置は一定の軌道を回っているにも拘わらず、これを地球を中心にして見ると、天空を右に行ったり、左に行ったりと、まさに迷い星というに相応しい動きをします。この惑星の位置、太陽を中心にしてみれば規則正しい動きをしていますので、ずっと簡単になります。この位置計算を実際にやってみようと思います。さて、どのようになりましたでしょうか。しばし太陽にいるつもりでこの惑星の位置をみてみましょう。

2.　計算の過程

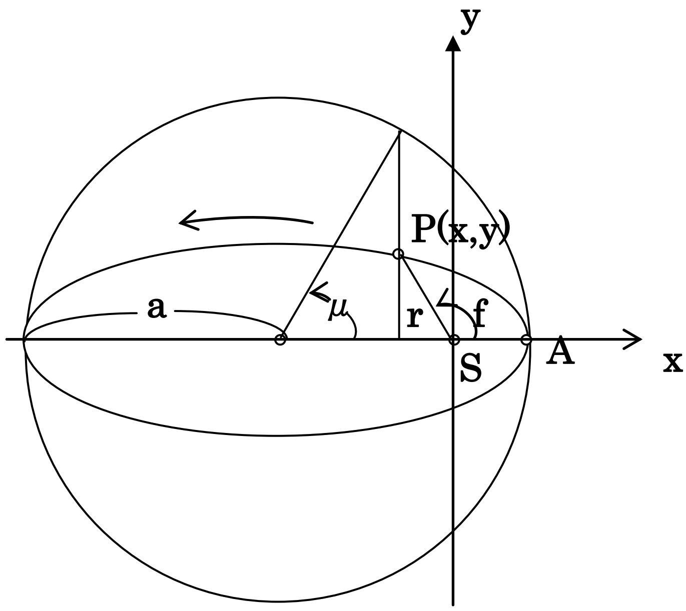
ある元期(t=0)に対する平均近点角 l_0 が与えられている場合には、
時刻 t における平均近点角 l は、

$$l = nt + l_0 \cdots\cdots (1)$$

ただし、ここで n は、

$$n = 360° / T$$

T は公転周期
をしめしている。



図―1 楕円軌道と xy 座標の関係

3.　軌道上の惑星の位置

ある時点での各惑星の軌道データが与えられる。ここでは、1979 年 7 月 1 日 0 時 ET の各惑星の長半径 a、離心率 e、平均近点角 l_0、平均運動 n が与えられているものとする。これから、公転周期を 50 分割して、それぞれの時点での惑星の位置を求める。ちなみに各惑星のデータを表記すると表－１のようになる。

公転周期を５０分割し、元期から、この間隔で惑星の位置を求めて、プロットすれば惑星の軌道の軌跡が得られる。

表－１　惑星の平均軌道の長半径、離心率、平均近点角、平均運動

（元期 1979 年 7 月 1 日 0 時 ET）

	a(天文単位)	e	l_0	n(day^{-1})
水星	0.47809 87	0.20563 043	125°　.25386 9	4°　.09233 8839
金星	0.72333 32	0.00678 269	291　.25669 4	1　.60213 0497
地球	1.00000 00	0.01671 774	175　.87721 9	0　.98560 9127
火星	1.52369 12	0.09338 096	54　.73206 1	0　.52403 3071
木星	5.20283 35	0.04828 668	118　.06611 7	0　.08309 1846
土星	9.53876 21	0.05603 612	67　.20420 8	0　.03345 8100
天王星	19.19139 13	0.04612 449	53　.43591 7	0　.01173 0655
海王星	30.06105 91	0.01006 989	223　.86361 9	0　.00598 1893

3-1.　m プロット目の平均近点角を求める

公転周期を 50 分割し、この間隔での惑星の位置計算をする。

$$t = T / 50$$

従って、m プロット目の期日の平均近点角

$$l = l_0 + m \times n \times t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

3-2. ケプラーの方程式を解く

ついで、ケプラーの方程式を解く。惑星の楕円軌道のケプラーの方程式は

$$\mu - e \sin \mu = l \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

この方程式は、このまま解を求めることはできないので近似解をつぎのようにして求める。

まず、μ の近似値を求める。

μ の近似値はつぎの式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mu = l &+ \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 - \frac{1}{9216}e^7\right)\sin l + \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6\right)\sin 2l \\ &+ \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 + \frac{243}{5120}e^7\right)\sin 3l + \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6\right)\sin 4l \\ &+ \left(\frac{128}{384}e^5 - \frac{3125}{9216}e^7\right)\sin 5l + \frac{27}{80}e^6 \sin 6l + \frac{16807}{46080}e^7 \sin 7l\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(4)式で求めた μ の値を μ_0 としてこれを基に、ケプラーの方程式の近似解を求める。

近似解は、まず、補正値⊿μ_0 を求め、より正しい μ_1 を求める。

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mu_0 &= \frac{l-\mu_0+e\sin\mu_0}{1-e\cos\mu_0}\\ \mu_1 &= \mu_0+\Delta\mu_0\end{aligned}\right\}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

この μ_1 を、さらに精度の高い近似値 μ_2 にするためには、この計算をつぎのように繰り返せばよい。

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mu_1 &= \frac{l-\mu_1+e\sin\mu_1}{1-e\cos\varpi_1}\\ \mu_2 &= \mu_1+\Delta\mu_1\end{aligned}\right\}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

この計算を繰り返して、近似を高めながら μ_3、μ_4・・・・・と値を求めていくうちに、やがて、必要精度の範囲で⊿μ_i が 0 となる。この時の μ_i が求める μ である。

3-3. 軌道上の位置

このようにケプラーの方程式を解いて、離心近点角 μ を計算することができれば、そのあとは容易である。μ と真近点角 f との関係は次のように表される。

$$\left.\begin{aligned}\sin f &= \sqrt{1-e^2}\sin\mu/(1-e\sin\mu)\\ \cos f &= (\cos\mu-e)/(1-e\cos\mu)\\ \tan f &= \sqrt{1-e^2}\sin\mu/(\cos\mu-e)\end{aligned}\right\}\quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

$\cos\mu-e\geq 0$ で f は、第Ⅰ、第Ⅳ象限

$\cos\mu-e<0$ で f は、第Ⅱ、第Ⅲ象限

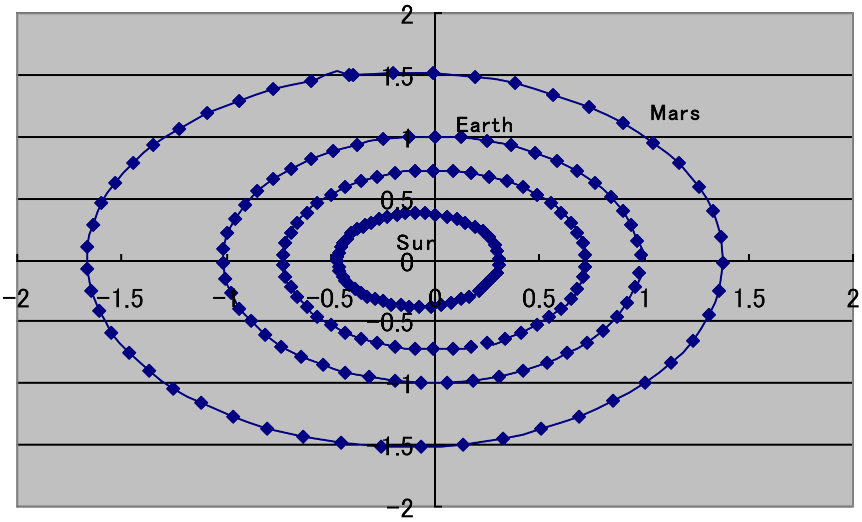
また、動径 r は、μ からも f からも計算できて、

$$\left.\begin{aligned}r &= a(1-e\cos\mu)\\ r &= a(1-e^2)/(1+e\cos f)\end{aligned}\right\}\quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

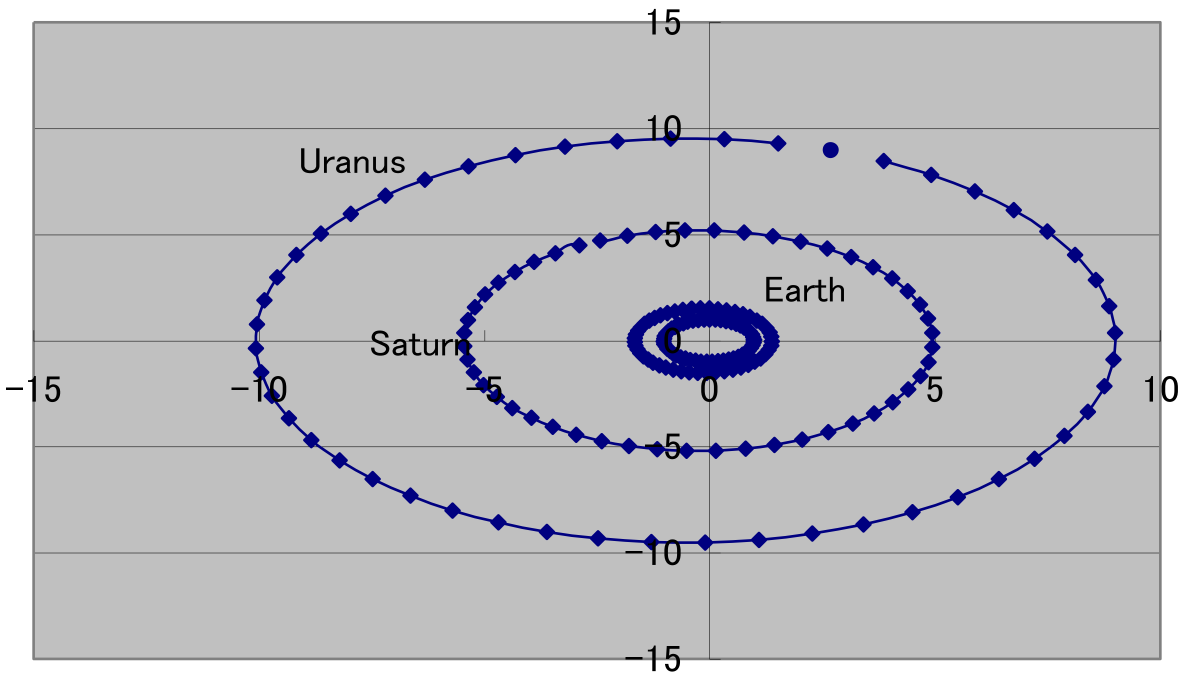
である。惑星の x, y 座標は、

$$\left.\begin{aligned}x &= r\cos f = a(\cos\mu-e)\\ y &= r\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin\mu\end{aligned}\right\}\quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

であり、これも μ から直接に計算できる。これで、楕円軌道上の惑星の位置は計算できることになる。このようにして計算した、内惑星の軌道を図―２に示した。
同じように、外枠星についても図―3 に計算結果を示した。



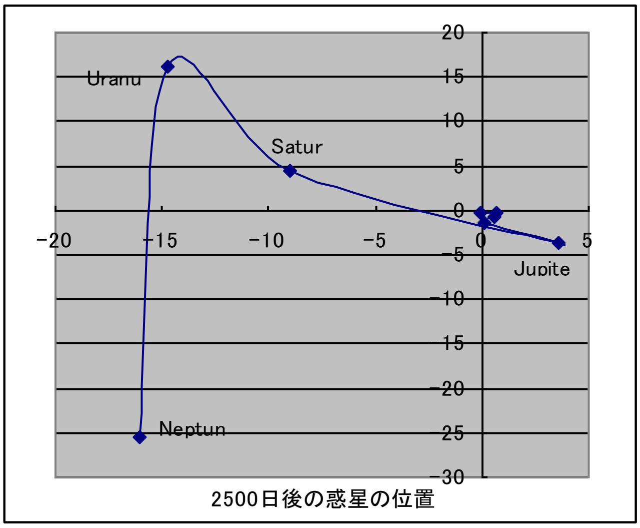
図—3　内惑星の軌道



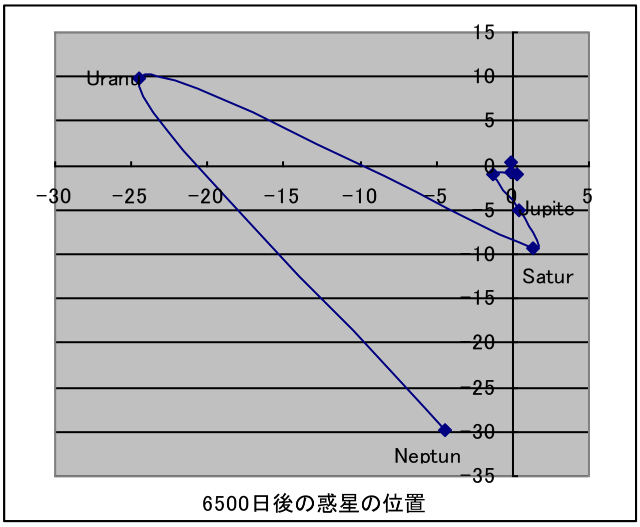
図—4　外惑星の軌道

4.　任意の時点での軌道上の惑星の位置

このような計算の応用として、各惑星について任意の時点での軌道上の位置を求めることができる。たとえば、元期から 2500 日を経過した時点での各惑星の位置は、図―5、さらに、6500 日後では、これが、図―6 のようになる



図―5　2500 日後の惑星の位置



図―6　6500 日後の惑星の位置

この計算を用いれば、容易に次の惑星直列の日にちを推定することができる。

平成 16 年 8 月 4 日　記す