

数値積分による円周率の計算方法

1 数値積分法とは

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $y = f(x)$ の定積分を求めることが困難、あるいは不可能な場合、この区間をいくつかの小区間に分割し、それぞれの小区間で、 $f(x)$ を低次の多項式で近似して定積分を求める方法を数値積分法という。

区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分けた分点を

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$$

とし、 $y_k = f(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $h = \frac{b-a}{n}$ とする。

補題 1

$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3$ について

$$\int_{-h}^h p_k(x) dx = \frac{h}{3} \{p_k(h) + p_k(-h) + 4p_k(0)\}$$

(証明)

(i) $p_k(x)$ ($k = 1, 3$) は奇関数だから 左辺 = 0

$p_k(-h) = -p_k(h), p_k(0) = 0$ より

右辺 = $\frac{h}{3} \{p_k(h) - p_k(h) + 4 \times 0\}$ となって成り立つ。

(ii) $p_2(x) = x^2$ は偶関数で

$$\text{左辺} = 2 \int_0^h x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{2}{3} h^3$$

$$\text{右辺} = \frac{h}{3} \{h^2 + h^2 + 4 \times 0\} = \frac{2}{3} h^3$$

となって成り立つ。

(iii) $p_0(x) = 1$ は

$$\text{左辺} = \int_{-h}^h dx = 2h$$

右辺 $= \frac{h}{3}(1 + 1 + 4) = 2h$
となって成りたつ。

補題 2

$p(x)$ が高々 3 次多項式ならば

$$\int_{-h}^h p(x)dx = \frac{h}{3} \{p(h) + p(-h) + 4p(0)\}$$

(証明)

$p(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ とおけるから

$$p(x) = p \, p_3(x) + q \, p_2(x) + r \, p_1(x) + s \, p_0(x)$$

よって、補題 1 より

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h p(x)dx &= p \int_{-h}^h p_3(x)dx + q \int_{-h}^h p_2(x)dx + r \int_{-h}^h p_1(x)dx + s \int_{-h}^h p_0(x)dx \\ &= p \frac{h}{3} \{p_3(h) + p_3(-h) + 4p_3(0)\} + q \frac{h}{3} \{p_2(h) + p_2(-h) + 4p_2(0)\} \\ &\quad + r \frac{h}{3} \{p_1(h) + p_1(-h) + 4p_1(0)\} + s \frac{h}{3} \{p_0(h) + p_0(-h) + 4p_0(0)\} \\ &= \frac{h}{3} \{p \, p_3(h) + q \, p_2(h) + r \, p_1(h) + s \, p_0(h)\} \\ &\quad + \frac{h}{3} \{p \, p_3(-h) + q \, p_2(-h) + r \, p_1(-h) + s \, p_0(-h)\} \\ &\quad + \frac{h}{3} \{p \, p_3(0) + q \, p_2(0) + r \, p_1(0) + s \, p_0(0)\} \\ &= \frac{h}{3} \{p(h) + p(-h) + 4p(0)\} \end{aligned}$$

補題 3

$p(x)$ が高々 3 次多項式ならば

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{6} \left\{ p(a) + p(b) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\}$$

(証明)

原点が $\frac{a+b}{2}$ となるように y 軸を平行移動したときの関数を $y = p^*(x)$, $a = 2h$ とすると

$$p(a) = p^*(-h), \quad p(b) = p^*(h), \quad p\left(\frac{a+b}{2}\right) = p^*(0) \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)dx &= \int_{-h}^h p^*(x)dx \\ &= \frac{h}{3} \{p^*(h) + p^*(-h) + 4p^*(0)\} \\ &= \frac{h}{3} \left\{ p(b) + p(a) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{b-a}{6} \left\{ p(a) + p(b) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

定理 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続で $a \neq b$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\}$$

(証明)

$f(x)$ の近似関数として、 $x = a, b, \frac{a+b}{2}$ において、 $f(x)$ と一致する高々 3 次多項式 $p(x)$ を考えると、補題 3 より

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b p(x)dx \\ &= \frac{b-a}{6} \left\{ p(a) + p(b) + 4p\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

積分区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に等分し、

分点を $a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n = b$ とし

$y_k = f(x_k) \ (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad h = \frac{b-a}{n}$ (小区間の幅)
とする。

それぞれの小区間で $y = f(x)$ を何次式で近似するかによってそれぞれに対応する公式が得られる。

(1) 台形公式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \{y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})\}$$

(証明)

各小区間の曲線上の 2 点 $P_k(x_k, f(x_k)), P_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ を直線
(1 次関数) で近似すると

$$f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \frac{1}{2} \{f(x_k) + f(x_{k+1})\}$$

だから、定理より

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx &= \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left\{ f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{x_{k+1} - x_k}{6} \left\{ f(x_k) + f(x_{k+1}) + 4 \times \frac{1}{2} \{f(x_k) + f(x_{k+1})\} \right\} \\ &= \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \{f(x_k) + f(x_{k+1})\} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \{f(x_k) + f(x_{k+1})\} \\
&= \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) \\
&= \frac{h}{2} \{y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\}
\end{aligned}$$

(2) シンプソンの公式 (1 / 3 公式)

$[a, b]$ を $2n$ 等分し、各小区間を 2 次式 (放物線) で近似すると

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})\}$$

(証明)

定理より

$$\begin{aligned}
\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx &= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \{f(x_{2k-2}) + f(x_{2k}) + 4f(x_{2k-1})\} \\
&= \frac{h}{3} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})
\end{aligned}$$

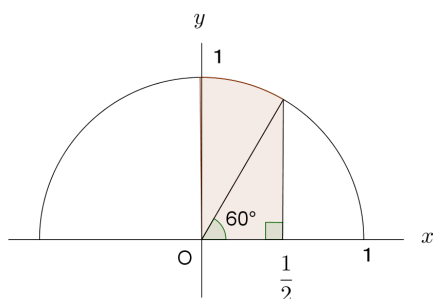
したがって

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \\
&= \frac{h}{3} \sum_{k=1}^n (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \\
&= \frac{h}{3} \{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})\}
\end{aligned}$$

なお、それぞれの公式による誤差は別の機会に回します。

3 数値積分による π の計算

(1) $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) を用いると



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = (\text{中心角 } 30^\circ \text{ の扇形の面積}) + (\text{直角三角形の面積}) \\
 &= \frac{\pi \times 1^2}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

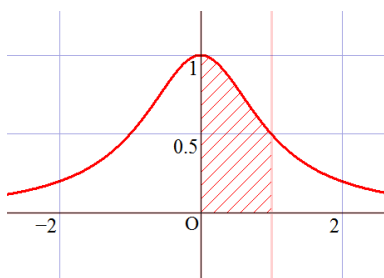
$$\therefore \pi = 12I - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

I を数値積分で求めて代入すればよい。

分割数が 10 と 20 のそれぞれについて Excel で計算した結果は下の表のとおりです。

	10 等分	20 等分
台形公式	3.1401495980	3.1412318297
シンプソンの公式	3.1415913838	3.1415925736

(2) $y = \frac{1}{1+x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) を用いると



$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1} x]_0^1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

だから、 I を数値積分で求めて、 $\pi = 4I$

分割数が 10 と 20 のそれぞれについて計算した結果は下の表のとおりです。

	10 等分	20 等分
台形公式	3.1399259889	3.1411759870
シンプソンの公式	3.1415926139	3.1415926530