

1 整合伝送線上の各点における信号

定在波には電圧定在波と電流定在波がありますが、本稿では特に断らない限り、電圧定在波を扱います。

図1のとおり、整合条件下で進行波 $E_s \cos(\omega t)$ が伝送線上を無損失で負荷 R_l に向かって伝搬するものとする、到達距離 l の点における信号 $f(t)$ は次式で表されます。ここで、 $\beta = 2\pi/\lambda$ を位相定数と呼びます。

$$f(t) = E_s \cos(\omega t - \beta l) \tag{1}$$

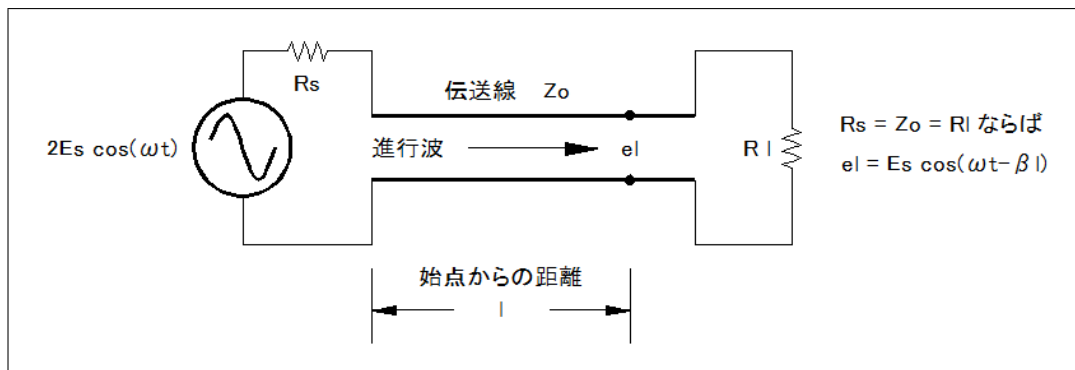


図1: 進行波信号の各所における振幅と位相

式1は、伝送線に定在波が存在しない場合には伝送線に次の特性があると示しています。

- ・ 整合条件が成立しているので、信号は進行波となり全て負荷に供給される。
- ・ 伝送線上の各点における信号の振幅係数は、一様に E_s となる。
- ・ 伝送線上の各点における信号の位相遅れは、始点からの距離 l に比例する。

式1を E_s で除して基準化しても一般性を保ちますので、以下の記述では進行波信号 $f(t)$ を次式に代えます。

$$g(t) = \cos(\omega t - \beta l) \tag{2}$$

2 終端不整合の伝送線上の各点における信号

入力端は整合 ($R_s = Z_0$) しているが終端が不整合 ($Z_0 \neq R_l$) である場合を考えましょう。ここで、伝送線路の全長を距離 L 、終端での反射係数を r とします。 r は次式で計算されます。

$$r = \frac{R_l - Z_0}{R_l + Z_0} \tag{3}$$

ここで、電圧に関しては進行波と反射波は互いのポテンシャルが合わされることから r が正符号となり、電流についてはその方向が逆であるので $-r$ とします。

式3から、 $R_l = \infty$ では $r = 1$ になり、 $R_l = 0$ では $r = -1$ になります。つまり、 L 点において進行波は全て反射されて負荷には一切吸収されません。 $Z_0 \neq R_l$ の状態では、信号電圧は L 点を通過してそのまま進行し負荷に供給される成分 $(1 - r) \cos(\omega t - \beta L)$ と L 点で反射波となって始点方向に

逆戻りする成分 $r \cos(\omega t - \beta L)$ に分配されます。

反射波に注目しましょう。 l 点における反射波 $h(t)$ は次式となります。

$$h(t) = r \cos(\omega t - \beta(2L - l)) \quad \text{ただし、} L \geq l \geq 0 \quad (4)$$

L 点より手前では進行波と反射波の両方が存在し、 l 点における合成電圧 $i(t)$ は次式となります。

$$i(t) = g(t) + h(t) = \cos(\omega t - \beta l) + r \cos(\omega t - \beta(2L - l)) \quad (5)$$

三角関数の和積公式

$$\begin{aligned} \cos(A - B) &= \cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) \\ \sin(A - B) &= \sin(A) \cos(B) - \cos(A) \sin(B) \end{aligned}$$

三角関数の和積公式を用いて式 5 を展開します。

$$\begin{aligned} i(t) &= \cos(\omega t) \cos(\beta l) + \sin(\omega t) \sin(\beta l) \\ &\quad + r \cos(\omega t) \cos(\beta(2L - l)) + r \sin(\omega t) \sin(\beta(2L - l)) \end{aligned} \quad (6)$$

式 6 中の $\cos(\beta(2L - l))$ および $\sin(\beta(2L - l))$ をさらに展開し、整理して次式を得ます。

$$\begin{aligned} i(t) &= \left((1 + r \cos(2\beta L)) \cos(\beta l) + r \sin(2\beta L) \sin(\beta l) \right) \cos(\omega t) \\ &\quad + \left((1 - r \cos(2\beta L)) \sin(\beta l) + r \sin(2\beta L) \cos(\beta l) \right) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

式 7 には、時間関数 (ωt) が直交形式で表現されています。

三角関数の合成公式

$$a \cos(A) + b \sin(B) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(A - \theta) \quad \text{ただし } \theta = \cos^{-1} a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

実信号のイメージを得るために、三角関数の合成公式を用いて式 7 を極座標形式に変換すると、次式になります。

$$i(t) = \sqrt{\left((1 + r \cos(2\beta L)) \cos(\beta l) + r \sin(2\beta L) \sin(\beta l) \right)^2 + \left((1 - r \cos(2\beta L)) \sin(\beta l) + r \sin(2\beta L) \cos(\beta l) \right)^2} \cos(\omega t - \theta) \quad (8)$$

これが、任意の反射点 L からの反射を考慮した点 l における電圧の一般式です。位相定数 θ の計算は可能ですが、本テーマには関係しないので未知数のままとします。

伝送線上の l 点における電圧の尖頭値は、式 8 における三角関数の振幅係数をとればよいので、位置をパラメータとする関数 $j(l)$ として次式となります。

$$j(l) = \sqrt{\left((1 + r \cos(2\beta L)) \cos(\beta l) + r \sin(2\beta L) \sin(\beta l) \right)^2 + \left((1 - r \cos(2\beta L)) \sin(\beta l) + r \sin(2\beta L) \cos(\beta l) \right)^2} \quad (9)$$

$L = 0.25\lambda$, $L = 0.5\lambda$ などの特殊条件では上式は簡単になりますが、本稿の検討では gnuplot や Excel などの PC ソフトを用いて作図するので、このままにしておきます。

3 電圧定在波の現れ方

教科書では一般に、定在波を概念的に説明していますが、ここで式 9 に基づいて定量的に解析し

てみます。

3.1 反射係数 r が異なる場合の定在波

l をパラメータとした振幅係数特性 $j(l)$ は、式9に含まれる定数 r および L に左右されますので、仮に $L = 0.6\lambda$ と置いて計算します。その結果を、 $r = 1.0$ 、 $r = 0.5$ 、 $r = -0.5$ および $r = -1.0$ の4つの場合を例として、図2に描きました。(注1) GNUPLOT でこの図を描くためのコマンドは稿末にあります。

なお、反射点までの距離 l が特殊な値をとる場合 ($L = n\lambda/4$ ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots$) には始点から見た伝送線のインピーダンスは実数となりますが、それ以外では虚数インピーダンスを呈します。逆にいうと、始点における振幅係数 $j(l)$ が最大または最小となるのは、 $L = n\lambda/4$ であり、始点でのインピーダンスは虚数分を含まない純抵抗になります。その根拠は、式7の \sin 項がゼロとなるのは $l = 1$ と置いて $L = n\lambda/4$ の場合だからです。

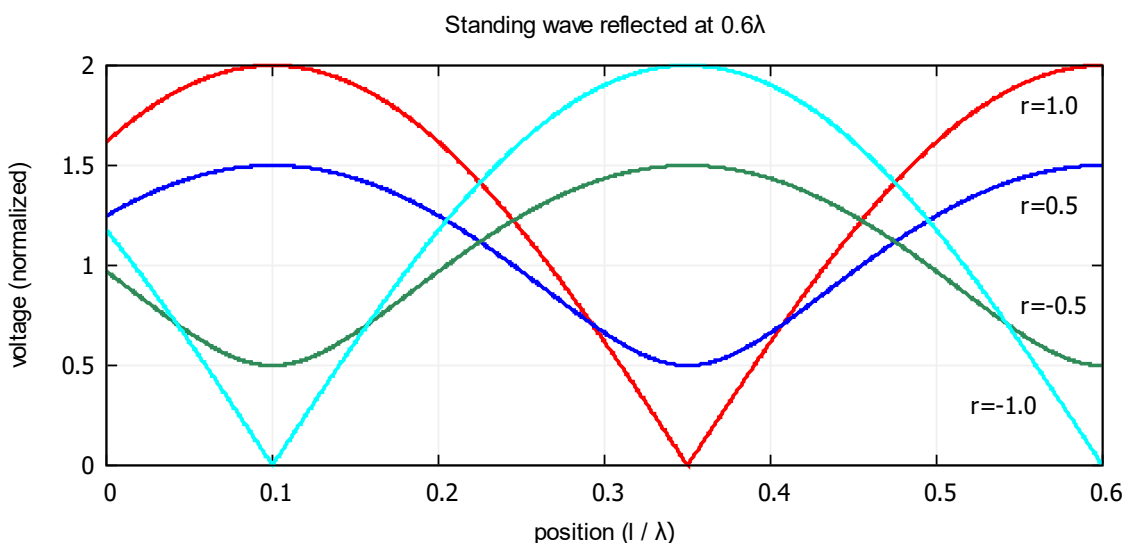


図2: 反射係数 r と振幅係数の関係 ($L = 0.6\lambda$ の場合)

図から読み取れるとおり、振幅係数の最大値は進行波のその2倍です。また、定在波は振幅最大点(ポジティブピーク)と最小点(ネガティブピーク)が生じます(両者の比を VSWR と呼びます)。 $r > 0$ の場合には反射点に振幅最大点が生じ、 $r < 0$ の場合には反射点で振幅最小点となります。そして、振幅最大点が複数ある場合の相互間隔は 0.5λ となり、振幅最小点の隣合う間隔も同じです。

もう一つ顕著な特徴は、 $r = 1$ の場合には振幅最小点が急峻な谷となりますが、 $r = 0$ に近づく程に振幅特性がサイン状に似てきます。 $r = 0$ ならば当然平坦になります。

3.2 反射点 L が異なる場合の定在波

次に反射点 L の位置によって定在波の発生状態がどう変わるかを調べます。ここでは、仮に $r = 0.5$ と置いて計算します。その結果を、 $L = 0.4\lambda$ 、 $L = 0.5\lambda$ および $L = 0.6\lambda$ の3つの場合を例として、図3に描きました。(注2) GNUPLOT でこの図を描くためのコマンドは稿末にあります。

ここでも、 $l = n\lambda/2$ でない場合には、始点における振幅が最大 ($r = 0.5$ の場合には 1.5) または最小 ($r = 0.5$ の場合には 0.5) ではなく、その呈するインピーダンスが虚数成分を持つこととなります。

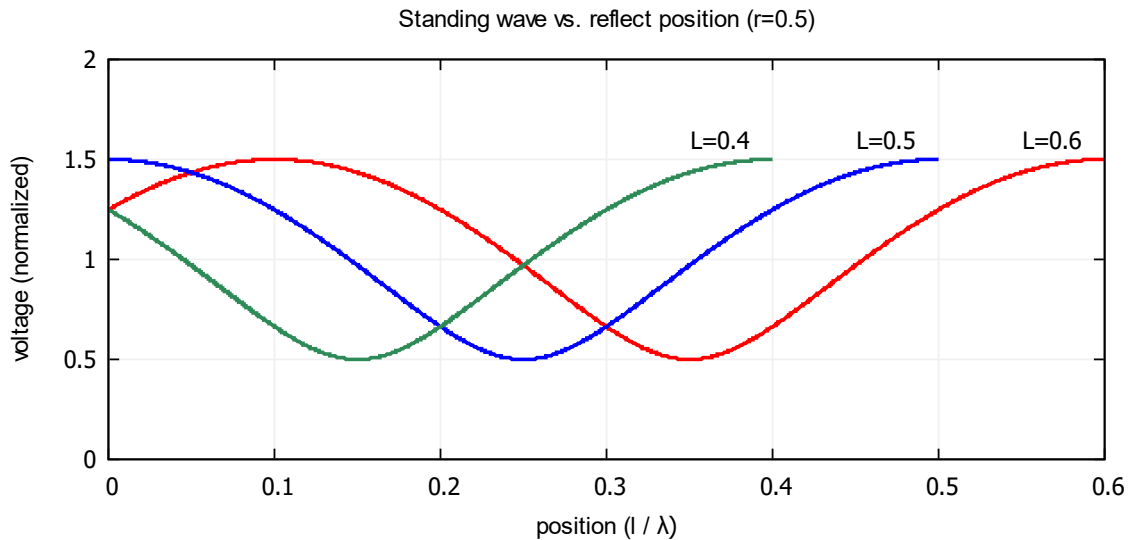


図 3: 反射点 L と振幅係数の関係 ($r = 0.5$ の場合)

図 3 が示すとおり、反射点の位置が伝送線路上のどの位置にあっても、振幅係数の特性は変わることがありません。振幅最大点または振幅最小点の隣り合う間隔は、ここでも 0.5λ を維持しています。

4 実用回路における定在波の影響

実用の無線回路では定在波の取扱いは極めて大事です。具体的には、(a) 送信機の出力行インピーダンスと伝送線路を含むアンテナ系のインピーダンス不整合による伝送能率の低下、(b) 定在波による過電圧・過電流の発生による部品への障害の発生が懸念されます。

ここではその影響の具合を調べてみます。

4.1 伝送能率

伝送線の入力端は、適当な整合回路を用いることにより容易に整合できますので、一般的に伝送線の入力側では反射が存在しないとして取り扱うことができます。問題になるのは、伝送線の特性インピーダンスと負荷抵抗が一致しない不整合です。

電力伝達の能率について基本的な図 4 で解析します。オームの法則にそって、負荷抵抗 R_l での消費電力 P_l は次式で計算できます。

$$P_l = \frac{E_s^2 R_l}{(R_s + R_l)^2} = \frac{E_s^2}{R_s (R_s/R_l + 2 + R_l/R_s)} \quad (10)$$

ここで $h = R_l/R_s$ とすると、次式が得られます。

$$P_l = \frac{E_s^2}{R_s (h + 2 + 1/h)} \quad (11)$$

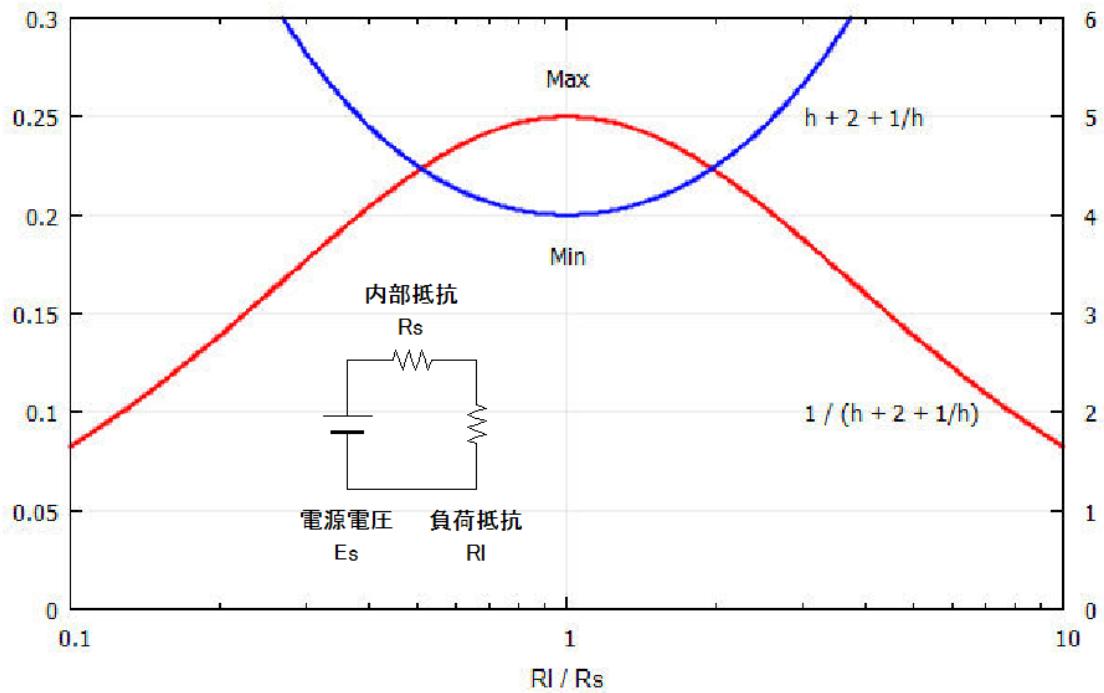


図 4: 最大電力伝達の条件

式 11 の分母に含まれる $(h + 2 + 1/h)$ が最小値ならば、 P_L が最大になります。その答えは、図 4 のグラフから明らかに $R_L/R_s = 1$ であることが分かります。なお、この証明は導関数を用いてもできます。要するに、 R_s と R_L を等しくするのが最も能率が良くなります。

4.2 伝送線の始点における現象

一般の教科書では伝送線の終端における不整合と反射波の発生については解説されていますが、反射波が伝送線の始点に到達した際の現象については述べられていません。これについて、ある者は「再度進行波になる」とか「信号源の内部抵抗を熱する」との幻想を抱きます。図 5 を参照しながら、正しく理解してみましょう。

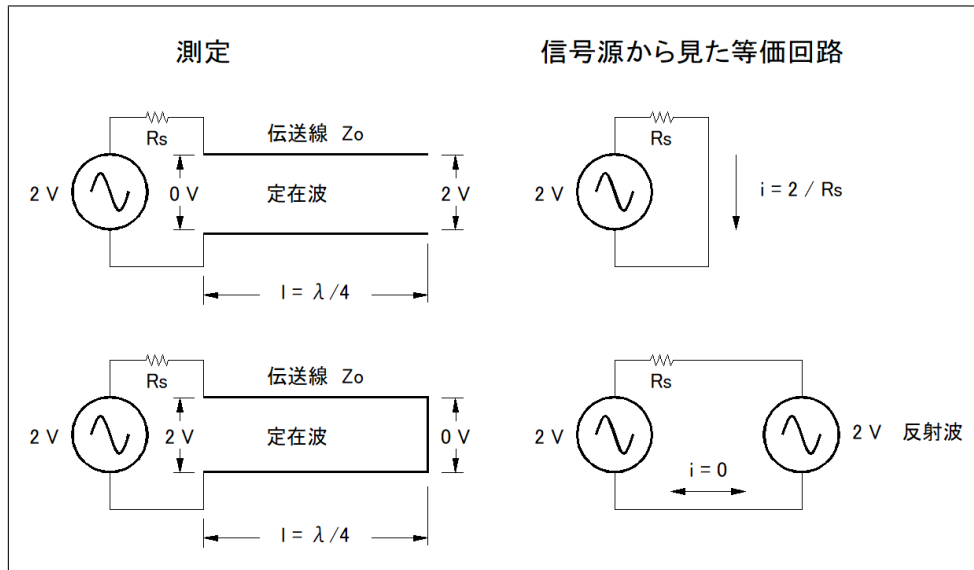


図 5: 定在波が信号源側を与える影響 ($\lambda/4$ 線路長など)

伝送線の始点においては $R_s = Z_0$ と整合がとれていますから、その点では「境界なく進行波も反射波も通過する」と考えなければなりません。何故ならば、進行波にとっての伝送線の終端があると同じく反射波にとって伝送路の始点は終端であるからです。若しも $R_s \neq Z_0$ であれば、そこで再反射と信号源側への侵入があります。

特徴を明瞭にするために最初に $L = \lambda/4$ で $R_l = \infty$ だとします。この条件を式 5 に代入しますと、伝送線の始点における信号は次式となります。

$$k(t) = \cos(\omega t - \beta l) + \cos(\omega t - \beta(2L - l)) = 0 \quad (12)$$

すなわち、伝送線の始点は電氣的に短絡状態です。したがって、 R_s を通過する電流 i は整合状態 ($R_s = Z_0 = R_l$) のその 2 倍となります。

次に $L = \lambda/4$ で $R_l = 0$ だとします。この条件を式 5 に代入しますと、伝送線の始点における信号は次式となります。

$$l(t) = \cos(\omega t - \beta l) + \cos(\omega t - \beta(2L - l)) = 2 \cos(\omega t) \quad (13)$$

この状態は、 R_s の両端に同相の電圧 $2 \cos(\omega t)$ が接続された形ですから、キルヒホッフの電圧則により、 R_s には電流が流れないこととなります。つまり、無負荷となります。ただし、伝送線の始点の電圧は整合状態 ($R_s = Z_0 = R_l$) のその 2 倍となります。

更により一般的な負荷による信号源への影響を調べます。図 6 に伝送線が $\lambda/2$ で負荷 $R_l = \infty$ である場合の実測電圧を示します。

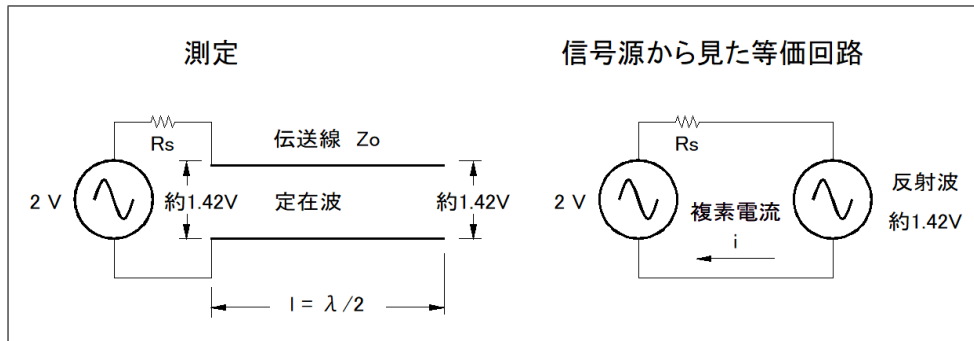


図 6: 定在波が信号源側に与える影響 (不特定の線路長など)

この例を含めて、任意の伝送線長または反射係数 r である場合には、伝送路の始点における電圧は位相遅れがあります。そして R_s を通過する進行波電流を求める一般式は、次式となります。

$$m(t) = \frac{2 \cos(\omega t) - \cos(\omega t - \beta l) - r \cos(\omega t - \beta(2L - l))}{R_s} \quad (14)$$

式 14 から判断できるように、 R_s を通過する電流は整合状態のその 2 倍以上にはなりません。上記の考察から得られる伝送路の始点での現象の特徴はつぎのとおりです。

- ・ 整合条件が成立しているので、進行波と反射波は全てその方向に通過する。
- ・ 伝送線の始点における電圧は、ゼロから終端側整合の場合の 2 倍の間の値となる。
- ・ 内部抵抗を通過する電流は、ゼロから終端側整合の場合の 2 倍の間の値になる。

送信機の終段電力増幅部や整合回路のリアクタンス素子の耐圧・電流量については、これらの現象を考慮した設計がなされるべきです。

以上本文

(注 1) "fig2.gp" の内容

```
unset key
set size ratio 0.4
set samples 1024
L=0.6
r1=1
r5=0.5
r5n=-0.5
r1n=-1
f1(r1,L,x)=(1+r1*cos(4*pi*L))*cos(2*pi*x)+r1*sin(4*pi*L)*sin(2*pi*x)
f5(r5,L,x)=(1+r5*cos(4*pi*L))*cos(2*pi*x)+r5*sin(4*pi*L)*sin(2*pi*x)
f1n(r1n,L,x)=(1+r1n*cos(4*pi*L))*cos(2*pi*x)+r1n*sin(4*pi*L)*sin(2*pi*x)
f5n(r5n,L,x)=(1+r5n*cos(4*pi*L))*cos(2*pi*x)+r5n*sin(4*pi*L)*sin(2*pi*x)
g1(r1,L,x)=(1-r1*cos(4*pi*L))*sin(2*pi*x)+r1*sin(4*pi*L)*cos(2*pi*x)
g5(r1,L,x)=(1-r5*cos(4*pi*L))*sin(2*pi*x)+r5*sin(4*pi*L)*cos(2*pi*x)
g5n(r5n,L,x)=(1-r5n*cos(4*pi*L))*sin(2*pi*x)+r5n*sin(4*pi*L)*cos(2*pi*x)
g1n(r1n,L,x)=(1-r1n*cos(4*pi*L))*sin(2*pi*x)+r1n*sin(4*pi*L)*cos(2*pi*x)
```

```

set title "Standing wave reflected at 0.6{/Symbol l}"
set xlabel "position (l / {/Symbol l})"
set ylabel "voltage (normalized)"
set label 1 "r=1.0" at 0.5, 1.8 left
set label 2 "r=0.5" at 0.55, 1.3 left
set label 3 "r=-0.5" at 0.55, 0.8 left
set label 4 "r=-1.0" at 0.52, 0.3 left
set xr [0:0.6]
set yr [0:2]
plot sqrt(f1(r1,L,x)**2+g1(r1,L,x)**2), sqrt(f5(r5,L,x)**2+g5(r5,L,x)**2), \
sqrt(f5n(r5n,L,x)**2+g5n(r5n,L,x)**2), sqrt(f1n(r1n,L,x)**2+g1n(r1n,L,x)**2)

```

(注2) "fig3.gp"の内容

```

unset key
set size ratio 0.4
set samples 1024
r=0.5
L6=0.6
L5=0.5
L4=0.4
f6(r,L6,x)=(1+r*cos(4*pi*L6))*cos(2*pi*x)+r*sin(4*pi*L6)*sin(2*pi*x)
g6(r,L6,x)=(1-r*cos(4*pi*L6))*sin(2*pi*x)+r*sin(4*pi*L6)*cos(2*pi*x)
f5(r,L5,x)=(1+r*cos(4*pi*L5))*cos(2*pi*x)+r*sin(4*pi*L5)*sin(2*pi*x)
g5(r,L5,x)=(1-r*cos(4*pi*L5))*sin(2*pi*x)+r*sin(4*pi*L5)*cos(2*pi*x)
f4(r,L4,x)=(1+r*cos(4*pi*L4))*cos(2*pi*x)+r*sin(4*pi*L4)*sin(2*pi*x)
g4(r,L4,x)=(1-r*cos(4*pi*L4))*sin(2*pi*x)+r*sin(4*pi*L4)*cos(2*pi*x)
set title "Standing wave vs. reflect position (r=0.5)"
set xlabel "position (l / {/Symbol l})"
set ylabel "voltage (normalized)"
set label 1 "L=0.6" at 0.55,1.6 left
set label 2 "L=0.5" at 0.45,1.6 left
set label 3 "L=0.4" at 0.35,1.6 left
set xr [0:0.6]
set yr [0:2]
plot sqrt(f6(r,L6,x)**2+g6(r,L6,x)**2), [0:0.5]sqrt(f5(r,L5,x)**2\
+g5(r,L5,x)**2), [0:0.4]sqrt(f4(r,L4,x)**2+g4(r,L4,x)**2)

```