

1. はじめに

Smith チャートとは、回路や伝送路のインピーダンス整合を容易に設計するために用意された、複素インピーダンスを統合的に示す図表です。1939年にRCAのエンジニアPhillip Smith氏により発明されました。世では一般に「Smith チャート」と称されていますが、その2年前に日本無線電信株式会社の水橋東作氏がSmith氏のものと同じ概念の正規化インピーダンス計算式を発表しているという事実もあります。

実際のSmithチャートは、図1のような体裁をしており、グリッド自体は市販品の印刷物やインターネット上の画像ファイルとして提供されていますので、ユーザはそこに描かれているグリッドに照らして数値をプロットすることができます。また、VNA(Vector Network Analyzer)の付属ソフトウェアにより描画されます。しかし、それらのグリッドを電子出版に利用するには、印刷物の場合はスキャンが必要であったり、画像ファイルの場合には解像度・鮮明度が足りないなどの不都合があります。

本稿では、PCにインストールしているCAD・Excelなどのグラフ描画ソフトを使って、正確で任意の体裁のSmithチャートを作成する手順を考えます。加えて、グリッド作成の過程を通じて、Smithチャートと複素インピーダンス並びにSWRの関係をより深く理解することを目的とします。

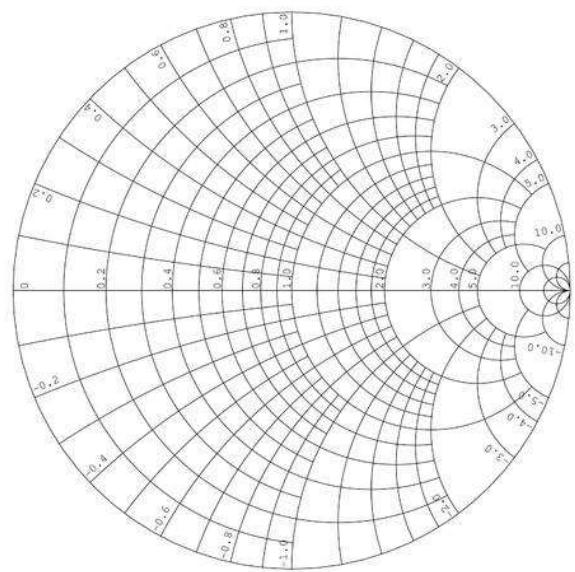


図 1: Smith チャートのグリッドの例

2. Smith チャートの要素

Smithチャートは、図2に示すように、インピーダンスの構成要素である抵抗 R およびリアクタンス X を複素平面にプロットして、信号源のインピーダンス(Z_0)と負荷(Z_a)との整合の状態を極座標上のSWRの値で統合的に表示します。

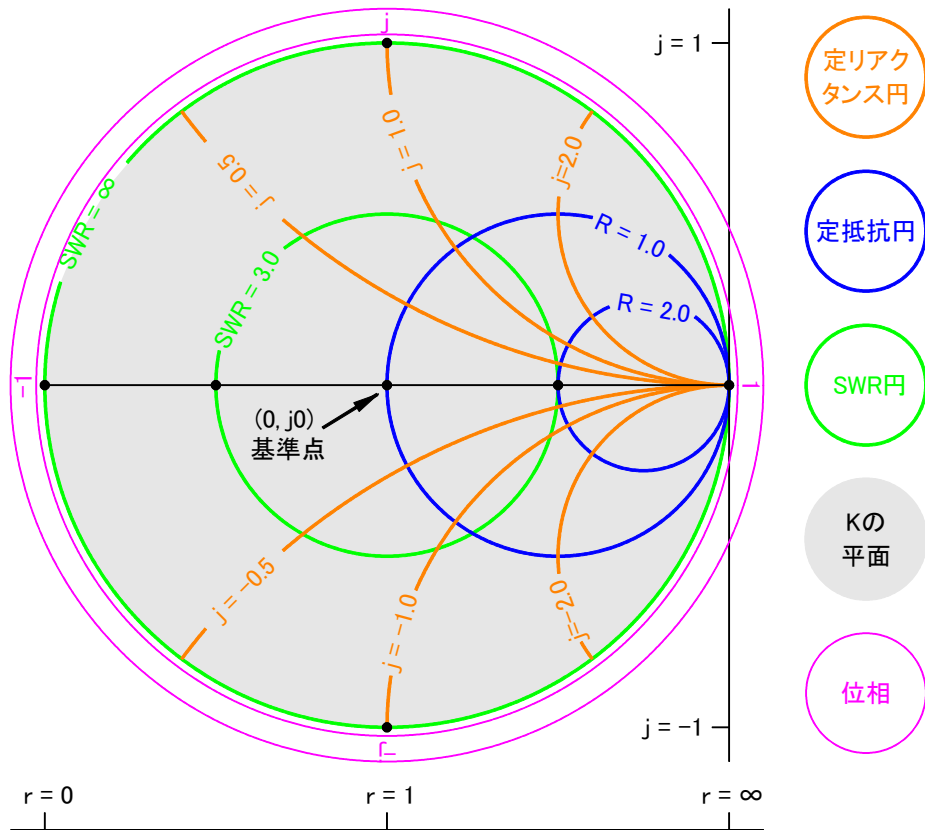


図 2: Smith チャートの各要素

R および X の実値は 0 から ∞ までの広範囲の値が存在しますが、Smith チャートではそれを -1.0 から 1.0 という紙面の範囲に対応させています。そんな都合の良いことができるのは、Smith チャートが実インピーダンスではなく反射係数 k で作図しているからです。

3. ネットワークの三角関係

最も簡素化したネットワークを図 3 に示します。伝送路と負荷の整合の具合は、その接続点において進行波と反射波の状態 (振幅と位相) により判断できます。

まず、 k とインピーダンス Z_0 および Z_a 並びに SWR の三者の相互関係を認識しましょう。

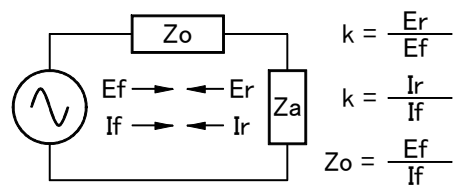


図 3: ネットワークの定数

負荷に向けて進行する電圧を E_f 、信号源に向けて戻る反射電圧を E_r とします。そうすると、 Z_a に加わる電圧は $E_f + E_r$ となります。しかし、電流については進行電流 I_f と反射電流 I_r は逆方向に当たりますから、 Z_a の電流は $I_f - I_r$ です。

3.1 k の意味

インピーダンスの定義に従って、 $Z_0 = E_f/I_f$ です。ここで、進行波と反射波の振幅比である k を用います。

前述のとおり、 Z_a の電圧は $(1+k)E_f$ ですが電流は $(1-k)I_f$ となります。従って Z_a は次式となります。

$$Z_a = \frac{E_f + E_r}{I_f - I_r} = \frac{(1+k)E_f}{(1-k)I_f} = \frac{1+k}{1-k}Z_0 \quad (1)$$

式1を変形すると、 Z_0 、 Z_a と k の関係は次式になります。

$$k = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} \quad (2)$$

式3により k の値を計算しますと、 1.0 ($Z_a = \infty$ の場合) から -1.0 ($Z_a = 0.0$ の場合) の間の値をとります。つまり、 Z_a のあらゆる実数が k の -1.0 から 1.0 に変換されることとなります。複素数であっても同様で、これが *Smith* チャートの k の円内に全ての複素インピーダンスが納まることになる魔法の鍵です。

3.2 基準化インピーダンスと k

一般に Z_0 は 50Ω などの特定で一定の値ですので、 Z_a/Z_0 の形で基準化しておく、式や図表での取扱いが簡単になります。

実際の数値に戻すには、計算結果を Z_0 倍すればよいこととなります。

式3を次式のとおり変形します。

$$k = \frac{(Z_a - Z_0)/Z_0}{(Z_a + Z_0)/Z_0} = \frac{Z_a/Z_0 - 1}{Z_a/Z_0 + 1} \quad (3)$$

Z_a が複素数なので Z_a/Z_0 も複素数となり、 $Z_a/Z_0 = r + jx$ とします。すなわち、式3は次式となります。

$$k = \frac{r - 1 + jx}{r + 1 + jx} \quad (4)$$

式4を有理化して次式を得ます。これが *Smith* チャートにプロット可能な数値となります。

$$k = \frac{r^2 + x^2 - 1 + j2x}{r^2 + 2r + x^2 + 1} \quad (5)$$

3.3 SWR と k

SWR は定在波の最大値を最小値で除した数値で定義されます。これを $Z_0 < Z_a$ の場合と $Z_0 > Z_a$ の場合に分けて適用すると、次式のとおり二通りの値があります。

$$SWR = \frac{E_f + E_r}{E_f - E_r} \quad \text{または} \quad \frac{E_f + E_r}{E_r - E_f} \quad (6)$$

k を用いて、式6を次式に代えます。(注：基準点を境として Z_0 と Z_a は逆数関係にあります。)

$$SWR = \frac{1+k}{1-k} \quad \text{または} \quad \frac{1-k}{1+k} \quad (7)$$

同じく k で表すと、次式です。

$$k = \frac{SWR - 1}{SWR + 1} \quad (8)$$

式5を式7に代入して、各項を整理します。

$$SWR = \sqrt{r^2 + x^2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \quad (9)$$

4 グリッドのデータ

前項で Smith チャートにプロットする数値が計算できました。これを紙面サイズを考慮して作図することにしてしまおう。

4.1 水平目盛りと基準寸法

まず、水平軸上に k の目盛りを決めます。 k はリニア目盛りで等間隔です。

水平軸上の k の代表的な値と対応する純抵抗を表 1 に例示します。もちろん $R = 0$ から $R + \infty$ が対応しています。(注:式 8 参照)

1, 2, 5 系列で SWR およびインピーダンスを示す場合に、対応する k の位置は表 2 の例のようになります。(注:式 5 参照)

表 1: 等間隔 k と R の対応

純 k	純抵抗 $R = (1+k)/(1-k)$
-1.0	0.0
-0.8	0.111
-0.6	0.25
-0.4	0.429
-0.2	0.667
0.0	1.0
0.2	1.5
0.4	2.333
0.6	4.0
0.8	9.0
1.0	∞

表 2: 1, 2, 5 系列 R と k の対応

純抵抗 R	純 $k = (R-1)/(R+1)$
50.0	0.961
20.0	0.905
10.0	0.818
5.0	0.667
2.0	0.333
1.0	0.0
0.5	-0.333
0.2	-0.667
0.1	-0.818
0.05	-0.905
0.02	-0.961

4.2 垂直方向へのリアクタンス目盛り

Smith チャートの水平軸はリアクタンス分を表します。水平軸から上がリアクタンス、下がキャパシタンスとなります。

リアクタンス分の寸法は、水平軸と同じ目盛りとします。

リアクタンス円弧は、半径を $1/x$ として、中心を座標 $(1, \pm 1/x)$ に置いて描きます。

4.3 等 SWR 円の描画

等 SWR 円は、中心が $k = 0$ (座標 $0, 0$) で半径が表 2 の k である円のグラフとします。 $k < 0$ の部分は等 SWR 円の左半分となっています。

4.3 等抵抗円の描画

定抵抗円は、半径が $r/2$ の円をその右端が $k = 1$ (座標 $1, 0$) に接するように配置します。

4.3 位相角の描画

円周を 2π で分割し、反時計回りに目盛ります。

5 PC ソフトによるグリッドの描画

5.1 gnuplot の場合

gnuplot のインプットファイルを次の内容のテキストファイルで用意します。この記述は、基準化した定抵抗円、定リアクタンス円および SWR を 1, 2, 5 シリーズで描くものです。

gnuplot を起動した上で、次のとおりコマンドを打ちます。

```
load 'smith-grid2.gp' CR
```

(以下 smith-grid2.gp)

```
#A gnuplot inputfile for drawing smith-grid (c)2020 JA5FP
#1,2,5 series
unset key
unset title
unset xtics
unset ytics
unset xlabel
unset ylabel
unset zeroaxis
unset grid
set parametric
set multiplot
set size square 1.0,1.0
set xrange [-1.1:1.1]
set yrange [-1.1:1.1]
set samples 2048
set linetype 1 lc rgb "#e0e0e0" lw 1
#set xtics scale 1.0, 0.5 nomirror
plot [-1:1] t,0 #r
#plot [-pi:pi] (1.0/11)*cos(t),(1.0/11)*sin(t) #SWR=1.2
plot [-pi:pi] (1.0/3)*cos(t),(1.0/3)*sin(t) #SWR=2.0
plot [-pi:pi] (2.0/3)*cos(t),(2.0/3)*sin(t) #SWR=5.0
plot [-pi:pi] (9.0/11)*cos(t),(9.0/11)*sin(t) #SWR=10.0
plot [-pi:pi] (10.0/11)*cos(t)+(1.0/11),(10.0/11)*sin(t) #r=1/10
plot [-pi:pi] (5.0/6)*cos(t)+(1.0/6),(5.0/6)*sin(t) #r=1/5
plot [-pi:pi] (2.0/3)*cos(t)+(1.0/3),(2.0/3)*sin(t) #r=1/2
#plot [-pi:pi] (3.0/5)*cos(t)+(2.0/5),(3.0/5)*sin(t) #r=2/3
plot [-pi:pi] (1.0/2)*cos(t)+(1.0/2),(1.0/2)*sin(t) #r=1.0
plot [-pi:pi] (1.0/3)*cos(t)+(2.0/3),(1.0/3)*sin(t) #r=2
plot [-pi:pi] (1.0/6)*cos(t)+(5.0/6),(1.0/6)*sin(t) #r=5
plot [-pi:pi] (1.0/11)*cos(t)+(10.0/11),(1.0/11)*sin(t) #r=10
plot [-pi:-2.943] (10.0)*sin(t)+1.0,(10.0)*cos(t)+10.0 #j=0.1
plot [-pi:-2.746] (5.0)*sin(t)+1.0,(5.0)*cos(t)+5.0 #j=0.2
plot [-pi:-2.218] (2.0)*sin(t)+1.0,(2.0)*cos(t)+2.0 #j=0.5
plot [-pi:-0.5*pi] sin(t)+1.0,cos(t)+1.0 #j=1.0
plot [-pi:-0.93] (0.5)*sin(t)+1.0,(0.5)*cos(t)+0.5 #j=2.0
plot [-pi:-0.38] (0.2)*sin(t)+1,(0.2)*cos(t)+0.2 #j=5.0
plot [-pi:-0.25] (0.1)*sin(t)+1,(0.1)*cos(t)+0.1 #j=10.0
plot [-pi:-2.943] (10.0)*sin(t)+1.0,-(10.0)*cos(t)-10.0 #j=-0.1
plot [-pi:-2.746] (5.0)*sin(t)+1.0,-(5.0)*cos(t)-5.0 #j=-0.2
plot [-pi:-2.218] (2.0)*sin(t)+1.0,-(2.0)*cos(t)-2.0 #j=-0.5
plot [-pi:-0.5*pi] (1.0)*sin(t)+1.0,-(1.0)*cos(t)-1.0 #j=-1.0
```

```
plot [-pi:-0.93] (0.5)*sin(t)+1.0,-(0.5)*cos(t)-0.5 #j=-2.0
plot [-pi:-0.38] (0.2)*sin(t)+1,-(0.2)*cos(t)-0.2 #j=-5.0
plot [-pi:-0.25] (0.1)*sin(t)+1,-(0.1)*cos(t)-0.1 #j=-10.0
plot [-pi:pi] cos(t),sin(t) lc "#000000" #SWR max
```

(以上 smith-grid2.gp)

gnuplot の画像出力は次のようになります。

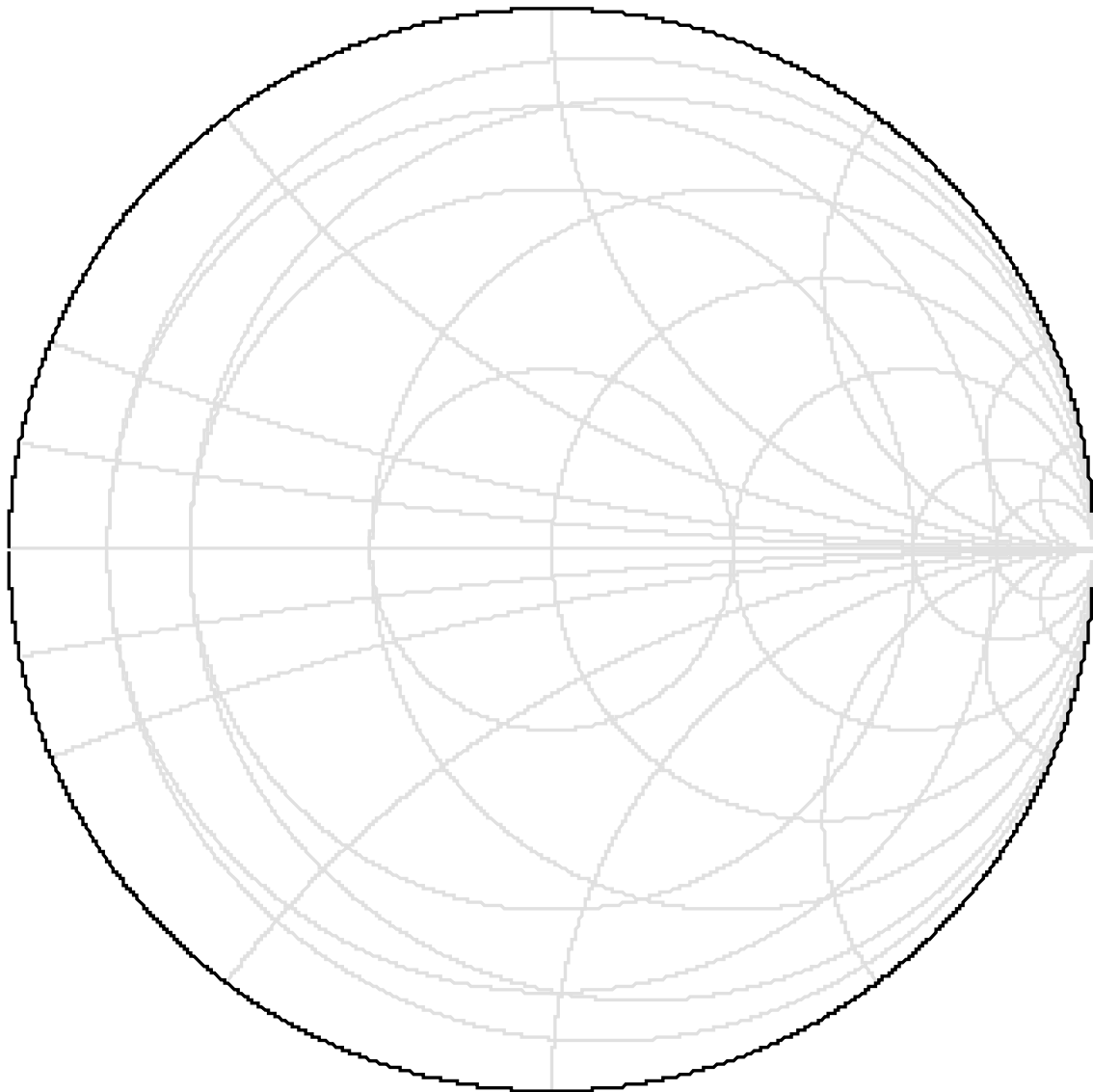


図 4: gnuplot が出力した Smith チャートのグリッド

5.2 DesignCAD の場合

CAD ソフト DesignCAD による画像出力は、次のとおりです。

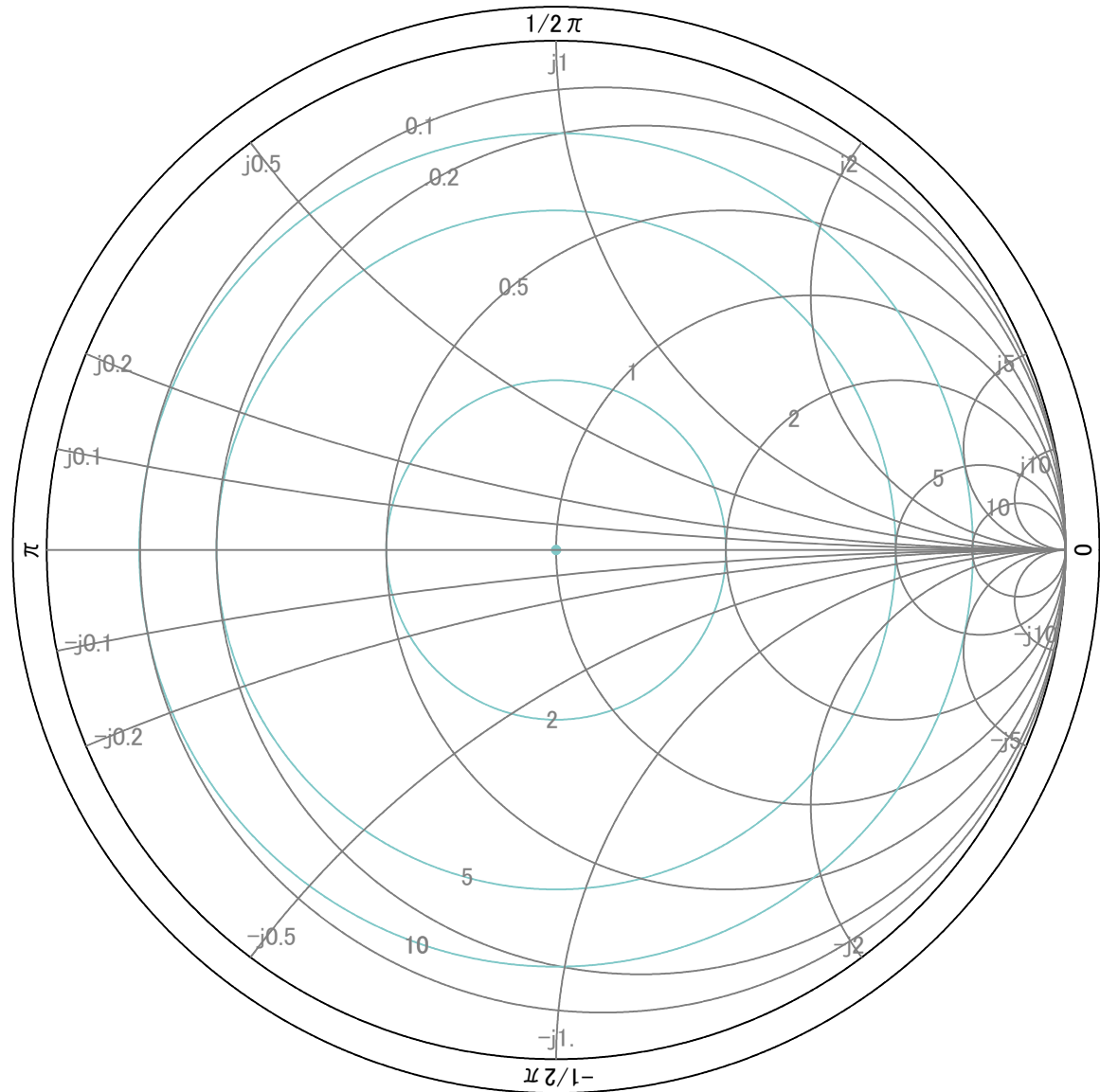


図 5: CAD で製図した Smith チャートのグリッド

5.3 Excel の場合

(todo)

6 基準化複素インピーダンスのプロット

前項で Smith チャートのグリッドが作成できましたので、いよいよ基準化インピーダンスをプロットできます。

r および x に対応する k が式 6 で得られていますので、これをプロットします。