

負周波数と複素信号

Jon Bloom, KE3Z(出典:ARRL QEX Sep.1994) 訳者:間 幸久, JA5FP

Jun.23.1996

**確かに負周波数というものが存在します。
これを理解すると信号の解析や処理が分かりやすくなります。**

負周波数という概念は、一般のアマチュアには馴染んでいないようです。受信機にもダイヤルに負の値の周波数は目盛ってありませんから。それでも、負周波数は存在します。この記事で、私はあなたを納得させるとともに、複素数で表す象徴信号というものが、信号処理をいかに分かりやすくできるかに論議を深めます。

ミクサを使うと、負周波数の問題にぶちあたります。私たちは、ミクサの2つの入力ポートに信号を入れると2つの周波数の和と差の周波数が生じることを、初歩の無線教科書で習いました。そのような出力周波数の計算では、正の値がでる場合と負の値がでることがあります。一般に、この教科書では負の値をありえないものとして無視するか捨てます。だけれど、そのやりの方が非現実的です。本当は、ミクサからでてくる正周波数には、必ずそれに対応する負周波数が存在します。何故だか分かりますか？

最初から始めましょう。とりあげる基本的な信号は正弦波です。この信号が扱いやすいだけでなく、実信号は多数の正弦波が加えあわされたものとして解析できることになっているからです。「解析できる」という役割を念頭におくことが大事です。私たちがここでやろうとしているのは、実際の信号を数式で表すことです。これが実世界から離れた抽象だとすれば、私たちの「周波数」という用語もまさに抽象だということを考えてみてください。周波数は質量や電荷というような物理量ではありません。それは、信号が繰り返している—その繰返率のことです。いいかえすと、信号のある特定の数学的な特性です。

1 正弦波の表現

正弦波は、定振幅のベクトルを点中心に回転して作られます。これが図1です。 x 軸と y 軸を組合わせた—ガウス平面の原点に起点をおくと都合がよいでしょう。正弦波の振幅は、瞬時ベクトルの先端を y 軸に置いて求めます。余弦波の場合は、 x 軸へ置きます。本記事では便宜上、余弦波を使います。(「正弦波」というのは実は一般化した用語のことで、正弦波・余弦波その他のあらゆる位相の正弦状波を含みます。)

回転ベクトルを使ってやっていることは、正弦波の生成や解析をするためのモデルを作ることです。このモデルは、正弦波の数式—関数を作るのに使えます。それができれば、数値演算によって、信号を任意の様態に変える処理ができます。この処理がアナログ電子的になされれば、数値演

算は回路として実現します。つまり、リニアアンプならば決まった係数で信号関数を増倍するし、電圧分割器ならば係数で分割し、ミキサならば2つの信号を互いに掛けあわせ、リアクタンスを含む回路ならば信号の遅延(位相回転)素子に位相の増減をおこします。DSP方式で処理する場合は、必要な数値計算はもちろんコンピュータが行ないます。処理は物理的に行なったとしても、数学を用いて信号を扱っているのです。要点はここにあります。つまり、信号処理を数学的にやるなら、数学的に厳密で首尾一貫するよう留意すべきです。それは、数学的に負周波数が信号の構成部分であれば、これを無視してはいけないということです。そして、負周波数の存在を認めることが、ミキサなど信号処理の類で何が起きているかの直観的な理解につながります。図1の回転ベクトル

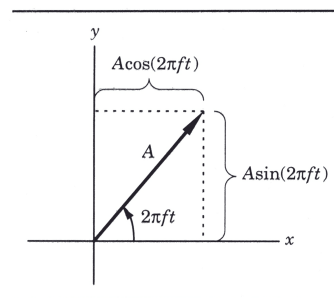


図 1: —正弦波は x と y の成分をもつ回転ベクトルで作られます。

から、任意時間における信号の振幅を表す数値関数を描くことができます。ベクトルは定率回転をし、毎秒たくさんの円(サイクル)を作ります—これが周波数 f です。各サイクルでは、ベクトルは 360° (2π ラジアン) の回転をします。ベクトルの回転角速度は、 $2\pi f$ radian/s です。任意時間におけるベクトルの角度を求めて、やらなければならないことは角速度に時間を乗じることです。つまり $2\pi ft$ の計算です。余弦波の振幅はベクトルの x 成分です。すなわち、三角法ではベクトルの余弦倍つまり $A \cos(2\pi ft)$ です。式を完全にするため、これを次の等式で表します。

$$a(t) = A \cos(2\pi ft) \quad (1)$$

この場合、 a は信号の瞬時振幅です。式 $a(t)$ は「 t の関数である a 」と読み、 t の特定の値を入れて a の特定の値を得るのを、簡単に示したものです。

式 1 では、 $2\pi f$ の値は定数です(周波数を定数とみなします)。そこで、度たび $2\pi f$ と書く代わりに、次の等式を使います。

$$\omega = 2\pi f \quad (2)$$

これで式 1 が、次になります。

$$a(t) = A \cos(\omega t) \quad (3)$$

これは正弦波を数学的に表現する良い方法です。 t にはあらゆる値がとれますし、ベクトルの角度とその時の a の値を知ることができます。しかし、問題が1つあり、 a の値からそのベクトルの角度を知ることができません。図 2 がその理由を示しており、同じ a の値をとるのに2つの角度が許されます。振幅が ωt の角度から作るのも可能だし、 $-\omega t$ の角度からも出来ます。これは、正弦波の位相はその振幅からは定まらないということです。これは、位相が意味をもつ信号処理を行なう場合に問題になるでしょう。つまり、初めの回転ベクトルのモデルが正しくなかったばかりに、望むところの数値演算が期待できないのです。こちらは、正確かつ a のいかなる角度でも曖昧でない値を得られるので、信号生成の用途には適します。一方、特定の a の値に対して曖昧な角度を導きだすので、完全な信号解析には向いていません。

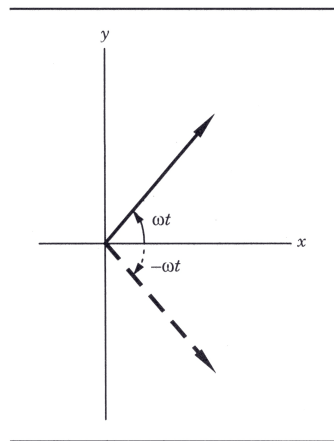


図 2: —ベクトル角の余弦を知るだけでは十分ではありません。同じ余弦値をとる 2 つの角度があるのですから。

モデルを完成するのには、付加情報—第 2 変数が必要です。これが振幅の瞬時値を決めるのにあ
りうる 2 つの角度間の曖昧さをなくします。ところが、付加情報となるものは**持っておらず**、振幅
情報だけを持っています。後で、付加情報を見つける方法は披露しますが、今はこれだけです。

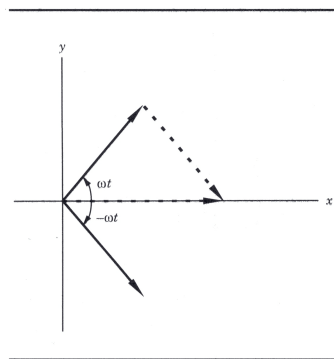


図 3: —実数信号は、実線で示
すような 2 つの回転ベクトルの
集合と考えることができます。2
つのベクトルの合成は、破線で示
すように、必ず x 軸上に存在し
ます。

そこで、このモデルから曖昧さをとり除く手法が必要です。それは、第 2 のベクトルを用意する
ことで可能です。正弦波が、**図 3** のとおり 2 つのベクトルから構成されていて、1 つが正角、他が
負角であるならば問題は解決されました。これで、 a がいかなる値をとっても 2 つのベクトルの角
度を得ることができます。この場合、1 つのベクトルが時計方向に回転していると、他方は反時計
方向に回転しその角度は必ず最初のベクトル角度の負になります。時計方向のベクトルの回転速度
は ω です。従って、他方のベクトルは $-\omega$ の速度です。言いかえすと、その周波数が負とい
うことです。各ベクトルはその x 成分を信号の振幅に寄せあわせますから、各ベクトルの長さは図 1
の元の単一ベクトルの長さの半分です。このような 2 つのベクトルのモデルを表す等式は次にな
ります。(訳註 2)

$$a(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega t) + \frac{A}{2} \cos(-\omega t) \quad (4)$$

この新しい等式が問題を解決します。つまり、 a の値から 2 つの回転ベクトルの角度を知ること
ができます。**式 4** が示すのは、信号は正と負の 2 つの周波数成分で成りたつということです。これ
は振幅が実数で与えられた信号一般の特性です。2 つのベクトルの合成は x 軸にあること、つまり
実数であることに留意ください。

まだあなたが負周波数の存在を疑うのでしたら、次のことを考えてみてください。物理学ではよ

く負の速度のことを話題にします。これが意味するのは、物体の速度が0より遅いというのではなく、方向が正方向に対して反対であるということです。ここでも同じです。負周波数は、信号が毎秒0回以下で繰り返すというのではなく、ベクトルが正周波数の信号に対して反対の方向に回転しているということです。

よく使われる信号は、単なる正弦波ではなく、もっと混み込んだものです。ここでは深めませんが—その信号は周波数・位相そして振幅が変動している複数の正弦波の集合として考察されるのです。信号を構成する各正弦波は、ここで論議したように、正と負の両方の周波数成分を持ちます。

2 信号の混合

混合というのは、数ある信号処理の中で必須の手法です。理想のダブルバランスミキサは、入力信号の1つの瞬時振幅値を他の入力信号の(時間的に)対応する振幅に掛けて、出力信号を作ります。2つの入力信号の内の1つが ω_1 他方が ω_2 の異周波数の正弦波であれば、混合の結果は次になります。

$$y(t) = A \cos(\omega_1 t) \cdot B \cos(\omega_2 t) \quad (5)$$

ここで、 y はミキサの出力信号です。

周波数的にみて y の内容は何を意味しているのでしょうか。数学的な解答は、2つの時間的に変動する信号の掛け算は、畳込 (コンボリューション) の手法によって周波数ドメインで解析できることです。畳込のことを述べますと数ページを費やしますが、その結果だけを簡単に学ぶ手があります。それは、ある信号の各成分は他の信号の全ての周波数成分を変移するということです。

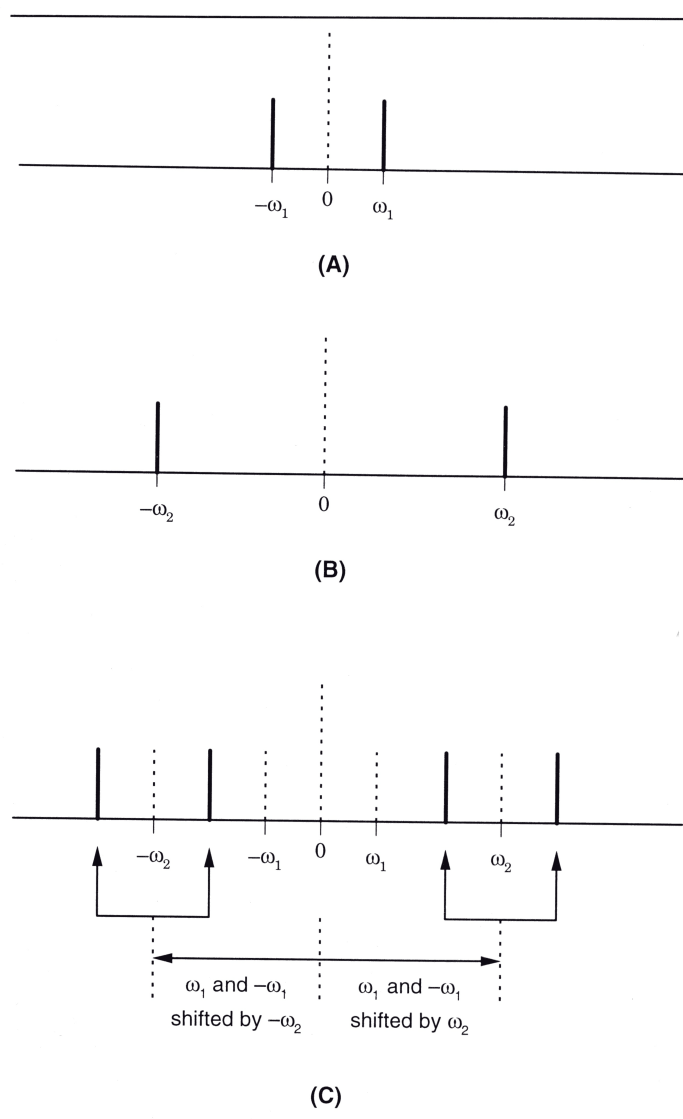


図 4: —2 つの実数信号の混合。スペクトラム成分は周波数対振幅グラフに示されています。ミキサへの入力である $\pm\omega_1$ と $\pm\omega_2$ は、それぞれ A と B に描かれています。混合の結果は C に示されています。

図 4 は、2 つの正弦波を混合する例を示します。変移させられる信号として $\cos(\omega_1 t)$ を、変移する信号として $\cos(\omega_2 t)$ を選びます。第 1 の信号のスペクトラムは図 4A のとおり、 ω_1 と $-\omega_1$ の 2 つの周波数成分を持ちます。同じく、第 2 の信号も図 4B のように、 ω_2 と $-\omega_2$ の成分があります。図 4C が混合後の出力を示します。 $\pm\omega_1$ の成分は、 ω_2 成分によって周波数がもち上げられて、 $(\omega_2 + \omega_1)$ と $(\omega_2 - \omega_1)$ に成分を作ります。そして $\pm\omega_1$ の成分はまた、 $-\omega_2$ 成分によって周波数を下げられて、 $(-\omega_2 + \omega_1)$ と $(-\omega_2 - \omega_1)$ を作ります。変移される周波数として ω_2 、変移する周波数として ω_1 をとることもできます。どちらでも同じ結果になります。(やってみてください。)

図 5 は、一方の入力信号がいくつもの周波数成分を持っている場合の、混合過程を示します。例は、搬送波と側波帯からなっている被変調波です。この絵では、信号の占有周波数帯を示すことによってこの信号を表現します。この信号と単一の正弦波との混合が、図 5B に示すような出力結果になります。

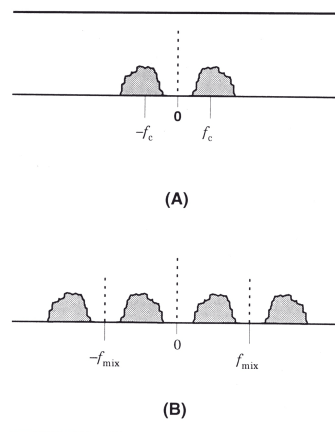


図 5: —(f_c にある) 搬送波とその側波帯の (f_{mix} にある) 単一周波数信号との混合。

この方法での混合についての考察のほうが、(「混合は、和と差の積を生みだす…」云々の) 多くのアマチュアが初めに学んだ方法より、直観的に分かりやすいでしょう。そして、次に触れるように、複素信号に容易に適用できます。

3 複素信号

以上の考察は、時間的に単一の振幅を有する実正弦波を取り扱うときに、何が起きているかを示しています。このモデルでは、2つの回転ベクトル—2つの周波数—に頼るほかありませんでした。もしも、正弦波の各点に付加情報がもう1つあるならば、瞬時振幅から1つの回転ベクトル(図1)の角度を、曖昧さなしに求めることができます。この付加情報には、いくつかの候補があります。例えば、ベクトルの角度自身を使うこともできます。仮に、信号が振幅情報だけでなく角度情報を運んでいるとすれば、それで十分です。この手順には、波形の各点で2つの値—アナログ電子では2つのチャンネル・デジタルコンピュータでは2組の数値—が必要です。

角度でもいいのですが、図1では第2の変数の方がもっと便利です。もし単一の信号振幅が、ベクトル角の余弦だけでなく正弦をあわせて教えてくれているならば、その信号の瞬時振幅に合致する唯一の角度が決まります。同じ余弦値を有しても異なった正弦値を有するような図2の2つの角度がある中で、正弦値を含めることが角度の曖昧さをなくすことになります。そして正弦波の各点それぞれが2つの値—余弦値及び正弦値—からなる正弦波は、単一の回転ベクトルを描きます。

信号処理を数学的にやろうとしているのですから、波形上の点を特定する2つの値を1つの数値に統合する方法があるのは都合がよいでしょう。それを、複素数をなす2つの数値で実現します。それができるのは、正弦成分と余弦成分は互いに直角であり、複素数の実数部分と虚数部分に対応しているからです。ここで信号は、 j を $\sqrt{-1}$ として、次で表されます。

$$a(t) = A \cos(\omega t) + j A \sin(\omega t) \quad (6)$$

式6は単一ベクトルを表しますので、1つだけの周波数成分があります。書かれているとおり、この式は時計方向に回転するベクトルを表し、正の周波数をとります。負の周波数ベクトルは、反時計方向の回転となり、次式を使います。

$$a(t) = A \cos(\omega t) - j A \sin(\omega t) \quad (7)$$

信号が振幅の実数値から作られる場合と同じく、複素信号は複数の正弦波から成りたつことも可能です。この場合、信号は正と負の両方の周波数をもつ必要はなく、あっても構いません。実際には、負の(単数または複数の)成分とは異なった正の(単数または複数の)成分を持ちます。

複素信号が、正の周波数成分または負の周波数成分のどちらか一方のみをもつ場合、「解析信号」と呼ばれます。

信号処理システムでは、複素数の実数部分の信号経路を「インフェーズ(I)」チャンネルと呼びます。虚数部分の信号経路を「クアドラチャ(Q)」チャンネルと呼びます。

3.1 複素信号の混合

2つの実数信号を混合するとき、変移する方の各周波数成分が変移される方の周波数成分を、変移成分に相当するだけ動かすと述べました。これは、混合する信号が複素である場合だけ、真です。例えば、2つの(正周波数成分のみを持っている)複素信号を混合するとすると、その結果は周波数が2つの入力周波数の加算したものとなっている信号です。つまり、**図6**に示すように、一方の信号が他方をもち上げます。あるいは、変移信号が負周波数であればもう一方の信号はもち下げられます。

これは、周波数変移の過程としてミキサを見る有用性を示しています。信号の周波数成分が何であるかに拘らず、はたまた実数であるか複素であるかに拘らず、変移の仕組はどんな場合も同じで

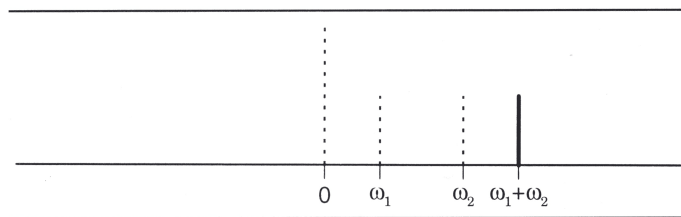


図 6: —2 つの解析
正弦状波の混合は、単
なる周波数の変移をも
たらしめます。

す。

もちろん、2 つの複素信号の掛け合は、2 つの実信号の掛け合より少しばかり難しくなります。複素信号のそれぞれの値は、実と虚の部分から成り立ちます。2 つの数の掛け合は、次になります。

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad) \quad (8)$$

実と虚を信号処理のハードウェア・ソフトウェアでは別チャンネルでこなしますので、式 8 の履行には図 7 のブロックダイアグラムのなやり方が必要です。これは、アナログ電子では、できればやりたいものではないでしょう。DSP では、難しくはありませんが複素積算に思った以上のプロセッサ力が求められます。

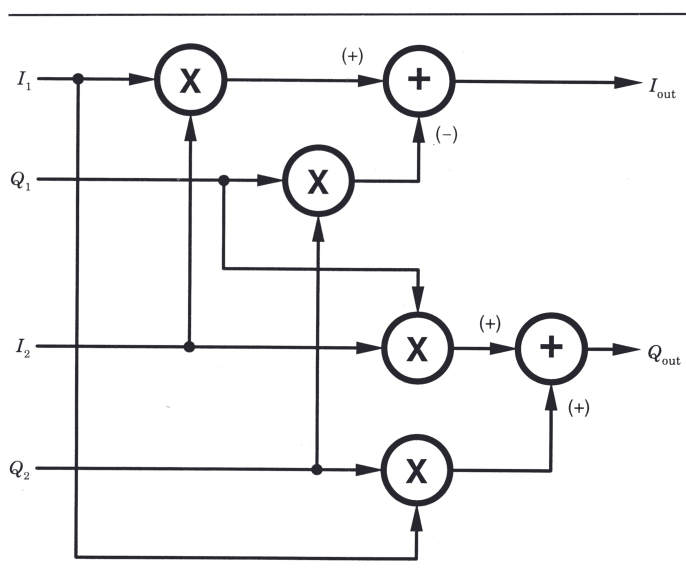


図 7: —2 つの
複素信号 (I_1, Q_1 と
 I_2, Q_2) の乗算には、4
回の掛け合わせと 2 回
の足し合わせが必要で
す。

3.2 解析信号の生成

実数信号を処理したいとき、「鏡像」の負周波数ではなしに、解析信号の使いやすさが向いているでしょう。そこで、入力に正周波数成分だけをもつ解析信号を作りたいと思います。入力信号を解析信号に変換するには、複素数の虚数部になるべき副次的な数値が求められるでしょう。問題は、どうやるかです。

もう一度図 1 の正弦波の回転ベクトルを考えてください。入力信号として、ベクトルの x 成分すなわち余弦成分をもっています。解析信号にするために、正弦成分があわせて必要です。幸いこ

れは正弦波です。特定時点の正弦成分は、1/4 サイクル (90°) 前の余弦成分と同じです。換言すると、正弦成分は (90°) 移相された余弦成分と同じです。それで、入力信号と類似で全周波数成分が (90°) ずらされた信号が生成できれば、これを目的の複素信号の虚 (クアドラチャ) 部として使います。

このクアドラチャ信号を作るのは、とくにアナログ電子では厄介です。信号の全周波数成分が 90° ずらされなければなりません。全成分が 1/4 サイクル遅延されねばならないことを意味します。しかし各周波数成分の周期が異なりますので、要求される遅延も異なります。これは狭帯域となる高い周波数の信号では、大した問題ではありません。例えば、9MHz を中心とする 3,000Hz 幅の信号にとって、信号に含まれる全成分はほぼ同一周波数にあります。遅延は

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{9\text{MHz}} \right) = 27.8\text{ns} \quad (9)$$

で、信号周波数の全域で 90° 近辺の移相が得られます。(位相誤差は約 0.02° です。) しかし、10kHz 中心の同じ 3kHz 帯域幅で、固定遅延では動作できません。この場合は、必要な遅延が実現できる優れたアナログ複素信号回路に頼らねばなりません。

DSP では、広帯域信号に 90° 移相を起こす「ヒルベルト変換」と呼ばれる技術があります。ヒルベルト変換器は、能率的な DSP アルゴリズムとされる有限インパルス応答 (FIR) フィルタで実現します。それは複素信号の使用が、アナログ電子より DSP でより一般的であるのがひとつの理由です。

3.3 半複素ミキサ

実数信号を複素信号に変換するについて、これとは別にアナログ的に実現しやすい方法があります。構成図は、**図 8** です。ここで、入力の実信号は、単一周波数である解析信号の実と虚の両成分と別個に混合されます。これは、実信号の正周波数と負周波数の成分に対し周波数を (この場合) もち上げるように、働きます。負周波数の成分が正周波数成分になるように大きくち上げられた場合には、出力信号には正周波数成分だけが含まれます。つまり、これが解析信号です。この系統図は「半複素」ミキサといわれます。

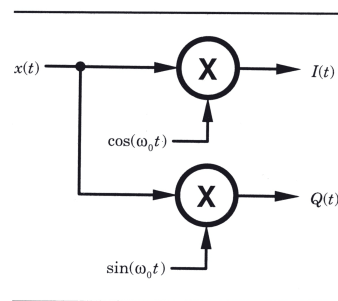


図 8: —半複素ミキサは、実数信号から周波数変移された複素信号を作ります。

4 複素信号と Weaver 法

信号を発生したり復調する Weaver 法がよく知られています。この技術を、複素信号を使う具体例として考察してみるのが有用です。基本的な構成図は、**図 9** に示されます。ここで入力信号は、目的の側波帯の中央にあたる負周波数 ($-\omega_0$) の解析信号と混合されます。これが入力信号を、**図 10B** に示すとおり、側波帯の中央が 0Hz となるように、周波数をひき下げます。低域通過フィルタが不要側波帯と隣接チャネル信号を除去します。出てきた複素信号は、今度は変調した「オーディオ」帯域中央に相当する正周波数 (ω_a) の解析信号と混合します。この解析信号が、信号を正しいオーディオ周波数にずらしします。

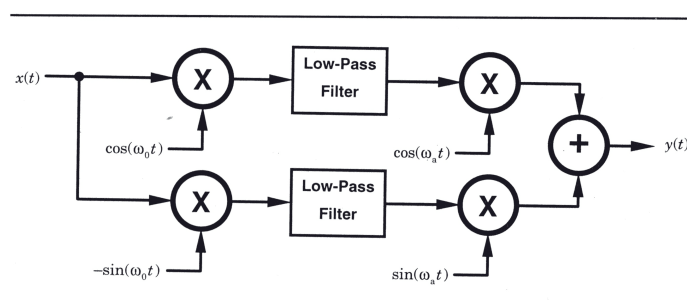


図 9: —SSB を復調する Weaver 法のブロックダイアグラム

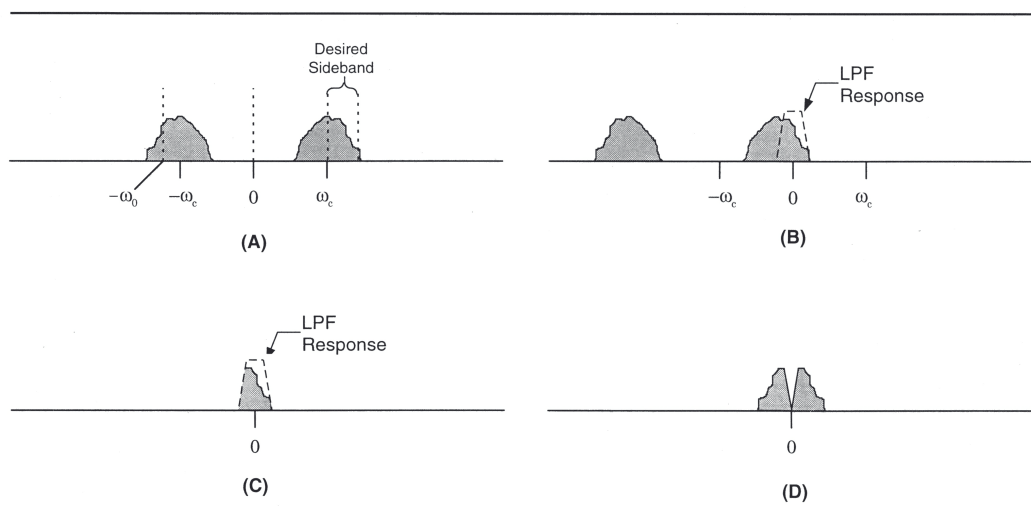


図 10: —図 9 の Weaver 法による SSB 信号の処理過程。入力信号は A。最初に半複素ミキサで周波数がひき下げられ、B のスペクトラムとなります。低域フィルタが所要帯域以外の不要スペクトラムを除去して、C の信号を作ります。この複素信号は (単一周波数の解析信号と掛けあわせ) ひき上がって、信号は適当なオーディオ周波数となります。ここでは (D) の実成分だけがシステムの出力として使われます。

あれこれの出版物がやっているように、皆さんは Weaver 法を三角法で解析できます。だけれど

も、変調過程に複素信号を使うと、どんなにか簡単です。図 9 の最初のミクサ 2 個は、図 8 の半複素ミクサと同じです。後段のミクサ 2 個は、実数部分だけが扱われる点を除いて、図 7 の複素ミクサと同じ動作をします。ここでは、オーディオ出力を得るための実数部分だけが必要です。

5 終りに

負周波数が存在するにも拘らず、アナログ電子であまり話を聞かないのは何故かについて思いめぐらすのは当然です。答は、あらゆる実信号はその正周波数成分に相当する負周波数成分を持っているので、どちらかを無視する余裕があるからです。存在しても、アナログ電子の見地からはほとんど「ミクサは入力周波数の和と差の信号を作る」というように、単純化できます。そんな単純化した見方も便利なのですが、完璧ではありません。もっと複雑な信号処理をやろうとすると、負周波数スペクトラムが正周波数の写像であるとは保証できないのですから、複素信号の使用はそのような単純化にとって代わるのです。

負周波数と複素信号は、信号処理システムの理解に役立つ価値ある解析手段です。アナログ電子はもとより、とりわけ DSP での実現の場合、他の非直観的な処理を考察するのにすっきりとして直観的な方法を提供します。

訳註

1. 訳語は一般的な用法に従うほか、次によりました。

Negative frequency → 負周波数

Positive frequency → 正周波数

Complex signal → 複素信号

Real signal → 実信号

Analytic signal → 解析信号

2. 本文で行っている幾何学的方法のほか、解析学で式 3 から式 4 を導くことができます。

式 3 は次に変形できます。

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos(\omega t) \\ &= \frac{A}{2} \cos(\omega t) + \frac{A}{2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

偶関数の性質から $\cos(\omega t) = \cos(-\omega t)$ ですので、上式の第 2 項を置き換えて

$$a(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega t) + \frac{A}{2} \cos(-\omega t)$$

となり、式 4 と同じ結果を得ます。